Le sujet comporte 3 parties, qui ne sont pas totalement indépendantes. Il est possible d'admettre le résultat d'une question et de l'utiliser pour les suivantes. La notation tiendra compte de la rigueur et de la clarté de la présentation.

PARTIE I

Dans cette partie, **I** désigne un intervalle ouvert de **R**, **q** une fonction continue sur **I** à valeurs réelles et **(E)** l'équation différentielle linéaire : $\mathbf{y'' + q(x)y = 0}$.

On suppose de plus que, pour tout élément x de **I**, $q(x) \leq 0$.

Pour abréger, on appellera solution de (E) toute fonction y de classe $\mathbf{C^2}$ sur **I** à valeurs réelles vérifiant: $\forall x \in I$, $y''(x)+q(x)y(x)=0$. Quand on cherchera une solution à valeurs complexes cela sera précisé.

1) Soit c un elément de **I**. Que peut-on dire d'une solution y de (E) vérifiant:
$y(c)=0$ et $y'(c)=0$?

2) Dans cette question on suppose qu'il existe une solution non nulle de (E), notée y, et deux éléments a et b de **I** tels que : $y(a)=y(b)=0$ et $\forall x \in]a,b[$, $y(x) \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $y'(c)=0$ et $y(c) \neq 0$.

b) On suppose que $y(c) > 0$.

Montrer qu'il existe un intervalle $]c-h , c+h[$ (avec $h > 0$) inclus dans $]a , b[$, et tel que, $\forall x \in]c-h , c+h[$ $y(x) > 0$.

c) Etudier la variation de y sur l'intervalle $]c-h , c+h[$.

d) Déduire de ce qui précède que l'hypothèse faite au début de la question est impossible.

3) Dans cette question, y est une solution non nulle de (E), admettant un zéro a dans **I** .

On note $\mathbf{F_1}$ l'ensemble des éléments b de **I** tels que $b > a$ et $y(b)=0$. On suppose que $\mathbf{F_1} \neq \varnothing$, et on pose : $m=\inf(\mathbf{F_1})$.

a) Montrer, en utilisant la question précédente, que le cas : $m \in \mathbf{F_1}$ est impossible.

b) On a donc $m \notin \mathbf{F_1}$.

Montrer que, $\forall n \in \mathbf{N^*}$, il existe b_n vérifiant : $m < b_n < m+1/n$ et $y(b_n)=0$.
En déduire que $y(m)=0$, puis que $m=a$.

c) Montrer que, $\forall n \in \mathbf{N^*}$, il existe $d_n \in]a , a+1/n[$ tel que : $y'(d_n)=0$. En déduire que $y'(a)=0$.

d) Déduire des questions précédentes que l'hypothèse $\mathbf{F_1} \neq \varnothing$ est impossible.

e) On pose de même $\mathbf{F_2} = \{ b \in \mathbf{I} , b < a \text{ et } y(b)=0 \}$. Montrer que $\mathbf{F_2} = \varnothing$.

4) Déduire de ce qui précède que toute solution non nulle de (E) possède au plus un zéro.

5) Exemples: a) **I=R** , **(E)** est l'équation différentielle: $y'' - \omega^2 y = 0$ ($\omega \geq 0$). Montrer directement que toute solution non nulle de (E) possède au plus un zéro et que toute solution de **(E') :** $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$) en possède une infinité.

b) $\mathbf{I=R^{+*}}$, **(E)** est l'équation: $x^2y'' - \omega^2 y = 0$ où ω est un réel positif ou nul quelconque. Trouver les solutions de (E) de la forme x^α où α est un nombre réel ou complexe qu'on déterminera. En déduire les solutions y à valeurs réelles de (E).

c) $\mathbf{I=R^{+*}}$, **(E)** est l'équation : $x^2y'' + \omega^2 y = 0$, ω réel positif ou nul quelconque. Donner les solutions de (E) et discuter selon les valeurs de ω si les solutions non nulles de (E) possèdent au plus un zéro sur $\mathbf{R^{+*}}$ ou non.

PARTIE II

Dans cette partie, **I** désigne un intervalle ouvert de **R** , p et q des fonctions continues sur **I** à valeurs réelles vérifiant: $\forall x \in \mathbf{I}$, $\mathbf{p(x) > q(x)}$.

(E_1) désigne l'équation différentielle : $\mathbf{y'' + p(x)y = 0}$

(E_2) désigne l'équation différentielle : $\mathbf{y'' + q(x)y = 0}$

On appellera solution de (E_1) (resp. de (E_2)) toute fonction y_1 (resp. y_2) de classe $\mathbf{C^2}$ sur **I**, à valeurs réelles, vérifiant: $\forall x \in \mathbf{I}$, $y''_1(x)+p(x)y_1(x)=0$

(resp. $y''_2(x)+ q(x)y_2(x) =0$).

1) Soit y_2 une solution non nulle de (E_2) . On suppose que y_2 possède deux zéros a et b (avec $a < b$) et que $\forall x \in]a, b[$, $y_2(x) > 0$. Soit y_1 une solution non nulle de (E_1).

a) On suppose dans cette question que : $\forall x \in]a, b[$, $y_1(x) > 0$. On désigne par W la fonction définie par :

$$W = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

Etudier la variation de W sur l'intervalle] a , b [. Montrer que l'hypothèse donnée plus haut : "$\forall x \in]a,b[$, $y_1(x) > 0$ " est impossible.

b) Montrer que y_1 possède au moins un zéro dans] a , b [.

2) Déduire de ce qui précède que si a et b sont des zéros consécutifs de y_2 solution de (E_2) (c'est à dire $y_2(a)=y_2(b)=0$ et $\forall x \in]a,b[$ $y_2(x) \neq 0$) alors toute solution de (E_1) possède au moins un zéro dans]a,b[.

3) Application: ω désigne un réel > 0 quelconque et p une fonction continue sur **R** telle que $\forall x \in \mathbf{R}$, $p(x) > \omega^2$. Montrer que toute solution y de (E) : $y''+p(x)y = 0$ sur **R** possède au moins un zéro dans tout intervalle] $k\pi/\omega$, $(k+1)\pi/\omega$ [, où k désigne un élément de **Z**, et a donc une infinité de zéros.

4) **I** est un intervalle ouvert, non borné, de **R**. Montrer que si on suppose seulement que: $\forall x \in \mathbf{I}$, $p(x) > 0$, une solution non nulle de (E): $y''+p(x)y=0$ sur **I** n'a pas nécessairement une infinité de zéros. (On pourra utiliser la question I)5)c).)

5) Dans cette question et celles qui suivent, on considère la fonction **F** définie par:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) = \int_0^{\pi} \cos(x \cos t)\, dt \quad .$$

a) Montrer que F est de classe C^2 sur **R** et donner F', F".
b) Montrer que F est solution de l'équation différentielle (E'):
(E') : xy"+y'+xy=0 .

6) Montrer que (E') admet des solutions développables en série entière, dont on précisera le rayon de convergence, et que F est l'une d'entre elles. On pose:

$$\forall x \in R, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \quad .$$

Donner l'expression de a_n à l'aide d'intégrales qu'on ne cherchera pas à calculer, et de l'entier n.
7) Trouver une relation entre a_n et a_{n+1} , en utilisant l'équation différentielle (E').
En déduire la valeur de l'intégrale suivante:

$$I_n = \int_0^{\pi} (\cos^{2n} t)\, dt \quad .$$

8) On suppose dans cette question que **I** est l'intervalle $]0, +\infty[$. y désigne une solution de (E'). On pose:

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \sqrt{x}\, y(x)$$

Montrer que z est solution de l'équation: $z'' + (1 + \frac{1}{4x^2}) z = 0$. En déduire que F possède une infinité de zéros et qu'en particulier tout intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$ où k est un élément de **Z**, contient un zéro de **F** .

PARTIE III

Dans cette partie, f désigne une fonction continue de $\mathbf{R}^{+*}$ dans **R, telle que la restriction de f à l'intervalle** $]1, +\infty[$ **soit bornée**, et on se propose d'étudier la fonction **H** définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ par:

$$\forall\ x\ > 0, \quad H(x) = \int_x^{+\infty} \sin(x-t)\, f(t) \frac{1}{t^2} dt$$

1) Justifier l'existence de H(x) pour tout réel x strictement positif.
2) Montrer que H est dérivable et exprimer H' en fonction de cosx, sinx, et d'intégrales dont on justifiera l'existence.
3) Montrer que H" existe , est continue, et vérifie l'équation différentielle suivante:

$$\mathbf{H''+H} = -\frac{f(x)}{x^2} \qquad \text{sur } R^{+*}.$$

Donner les solutions de l'équation différentielle: $y''+y = -\frac{f(x)}{x^2}$ et en déduire que toute solution de cette équation sur l'intervalle $\mathbf{I} = [1, +\infty[$ est bornée.
4) Dans cette question, on se propose d'étudier une fonction f, continue sur R^{+}, **bornée,** vérifiant $\forall\ x \in]0, +\infty[$, $f(x) = e^{ix} - \frac{1}{4}\int_x^{+\infty} \sin(x-t)\frac{f(t)}{t^2}\,dt$.

On admettra qu'une telle fonction existe.

Montrer que f est solution sur R^{+*} de l'équation différentielle :

(E) $\quad y'' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0$

Montrer que toute solution réelle y de (E) sur R^{+*} possède une infinité de zéros et que la distance entre deux zéros consécutifs de y est supérieure strictement à π.
5) Les hypothèses sont les mêmes qu' en 4). On pose, $\forall x \in R^{+*}, y(x) = x^{\alpha} z(x)$.
Montrer qu'il existe deux réels α_1 *et* α_2 , avec $\alpha_1 > \alpha_2$, tels que z soit solution d'une équation différentielle du type: $\mathbf{xz'' + bz' + xz = 0}$ où b est un réel dépendant de α_1 ou de α_2 selon la valeur choisie. On obtient ainsi deux équations différentielles (E_1) et (E_2).

(E_1) $\quad xz'' + 2\alpha_1 z' + xz = 0$
(E_2) $\quad xz'' + 2\alpha_2 z' + xz = 0$

Montrer que (E_1) ,(resp. (E_2)), possède une unique solution z_1 développable en série entière telle que $z_1(0) = 1$ (resp. une unique solution z_2 développable en série entière telle que $z_2(0) = 1$). Préciser le rayon de convergence de ces séries. Soient y_1 et y_2 les fonctions définies sur R^{+*} par:

$\forall x > 0$, $y_1(x) = x^{\alpha_1} z_1(x)$ et $y_2(x) = x^{\alpha_2} z_2(x)$

Montrer que $\{ y_1 , y_2 \}$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de (E) (Cf. **III**)4)).
Que peut-on dire de f relativement à cette base ?